1.7.9 Statika II

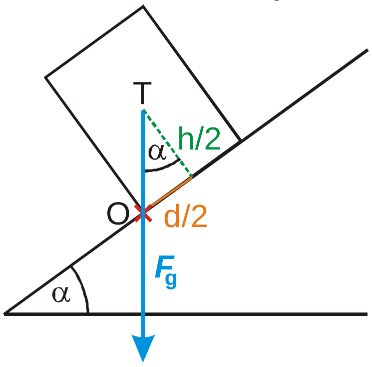
Předpoklady: 1707

Pedagogická poznámka: Není reálné očekávat, že by třída během jedné hodiny dokázala spočítat všechny příklady. Za úspěch považuji vyřešení příkladu 8.

Př. 1: Plechovka o průměru podstavy $16\,\text{cm}$ a výšce $22\,\text{cm}$ stojí na desce, kterou na jednom konci zvedáme. Při jakém úhlu nakloněné roviny se plechovka převrátí, pokud bude tření dostatečně veliké, aby po nakloněné rovině nesjela?

$d = 16\,\text{cm}$, $h = 22\,\text{cm}$, $\alpha = ?$

Aby se plechovka účinkem gravitační síly, která na ni působí nepřevrátila, musí její těžiště „ležet nad její podstavou". Plechovka se začne převracet v okamžiku, kdy se její těžiště dostane nad bod, který leží na obvodu její podstavy (viz. obrázek).



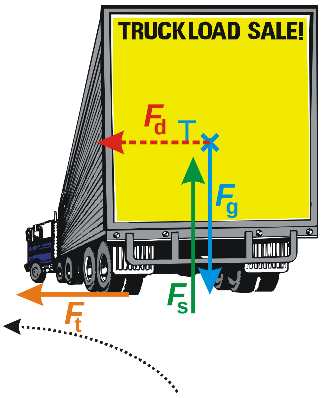
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{d}{h}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{d}{h} = \frac{16}{22} \doteq 0{,}73 \Rightarrow \alpha = 36°2'$$

Plechovka se převrátí, když bude úhel nakloněné roviny větší než $36°2'$.

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou řešeny jiným způsobem, než který se standardně využívá ve sbírkách. Začínají silovým rozborem všech působících sil, přechází se k rozboru v kritickém okamžiku a pak teprve k rovnicím mezi dvojicí sil, která hraje rozhodující úlohu (u které řešení většinou začíná).
Snaží se tak navodit postup, na který je možné samostatně přijít a není nutné si pamatovat jeho začátek.

Př. 2: Přívěs nákladního automobilu je naložen nákladem tak, že jeho těžiště je ve značné výšce nad povrchem vozovky a projíždí levotočivou zatáčkou. Zakresli do obrázku síly, které na přívěs působí. Jaké podmínky musí být splněny, aby přívěs zatáčkou projel beze smyku a nepřevrátil se?



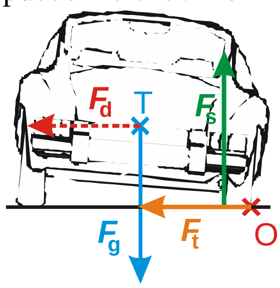
Na přívěs působí tři síly $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{F}_t$, jejichž výslednicí musí být síla $\boldsymbol{F}_d$ působící v těžišti tělesa $\Rightarrow$ dvě podmínky:

- výslednice sil $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{F}_t$ se musí rovnat vodorovné síle $\boldsymbol{F}_d$ $\Rightarrow$ jediná vodorovná síla $\boldsymbol{F}_t$ musí být dostatečně velká (na rozdíl od zbývajících svislých sil vytváří vodorovnou sílu $\boldsymbol{F}_d$, dříve jsme u průjezdu zatáčkou řešili pouze velikost $\boldsymbol{F}_t$),
- výsledný moment sil $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{F}_t$ vůči ose, kolem které by se auto převracelo, musí být stejný jako moment síly $\boldsymbol{F}_d$ (tím jsme se dosud nezabývali).

Pedagogická poznámka: Hlavní problém předchozího (i následujících příkladů) spočívá v tom, aby žáci přijali skutečnost, že na auto působí ve svých působištích tři síly $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{F}_t$, které dohromady vytvoří sílu F_d působící v těžišti. To, že dohromady sílu F_d vytvoří můžeme zkontrolovat pomocí správné výslednice a správného výsledného momentu.

Př. 3: Na následujícím videu je zachycen rychlý průjezd auta zatáčkou. Vysvětli, proč se auto v zatáčce naklání. (Rychlý průjezd obyčejného auta zatáčkou).

Auto má při projíždění zatáčky tendenci se převrátit podle osy, která prochází vnějším okrajem kol na vnější straně zatáčky. Do středu zatáčky totiž auto tlačí pouze třecí síla, která působí na úrovni silnice ("podráží autu kola").



Pokud by síla $\boldsymbol{F}_s$ působila uprostřed nápravy, její moment by byl stejně velký jako moment síly $\boldsymbol{F}_g$ (ale opačného směru) a výsledný moment sil $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{F}_t$ na auto by byl nulový (třecí síla $\boldsymbol{F}_t$ sice zabrání uklouznutí auta smykem po silnici, ale nezabraňuje jeho převrácení, protože působí na povrchu silnice a ne v těžišti auta, kde leží působiště potřebné výsledné síly F_d).

Na auto musí působit moment síly proti směru hodinových ručiček $\Rightarrow$ auto se začne otáčet ve směru hodinových ručiček $\Rightarrow$ více se zatíží vnější kola $\Rightarrow$ působiště síly $\boldsymbol{F}_s$ se posune ke vnějším kolům $\Rightarrow$ zmenší se moment síly $\boldsymbol{F}_s$ vůči ose O $\Rightarrow$ výsledný moment sil $\boldsymbol{F}_g$,

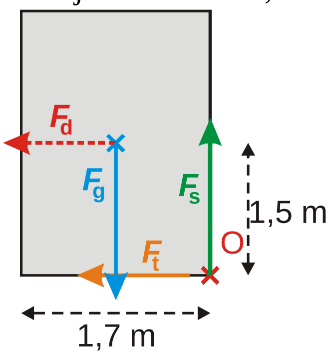
$\boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{F}_t$ je nenulový a působí proti směru hodinových ručiček $\Rightarrow$ auto se přestane naklánět a zatáčí.

Čím je potřebná dostředivá síla větší, tím více se váha přenáší na vnější kola, aby se moment síly $\boldsymbol{F}_s$ více zmenšil (výsledný moment se zvětšil).

Př. 4: Přívěs nákladního automobilu má rozvor kol 1,7 m, je naložen nákladem tak, že jeho těžiště je 1,5 m nad povrchem vozovky. Jakou nejvyšší rychlostí může auto s tímto přívěsem projet zatáčku o poloměru 50 m, aby se přívěs nepřevrátil? Předpokládej, že tření je dostatečně velké, aby nedošlo ke smyku.

$s = 1{,}7\,\mathrm{m}$, $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $r = 50\,\mathrm{m}$, $v_{\max} = ?$

Nakreslíme obrázek schématicky v okamžiku, kdy se přívěs začíná převracet (vnitřní kola se zvedají nad vozovku, auto stojí na vnější hraně vnějších kol).



Osa otáčení leží na kraji vnějšího kola.

Momenty jednotlivých sil:

- $M_g = F_g \dfrac{s}{2}$,
- $M_t = F_t \cdot 0 = 0$,
- $M_s = F_s \cdot 0 = 0$ (síla silnice působí pouze v místě, kde se krajní kolo dotýká vozovky),
- $M_d = F_d h$.

$M_g = M_d$ (výsledný moment síly F_d vytváří gravitační síla F_g, momenty zbývajících sil vůči ose O jsou nulové)

$$F_g \frac{s}{2} = F_d h$$

$$mg \frac{s}{2} = \frac{mv^2}{r} h$$

$$g \frac{s}{2} = \frac{v^2}{r} h$$

$$\frac{sgr}{2h} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{sgr}{2h}} = \sqrt{\frac{1{,}7 \cdot 10 \cdot 50}{2 \cdot 1{,}5}}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 17\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 61\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Nákladní automobil může zatáčku projet nejvyšší rychlostí $61\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Poznámka: Ve sbírkách se předchozí příklad řeší klasicky v neinerciální vztažné soustavě přívěsu pomocí odstředivé síly $\boldsymbol{F}_o$, jejíž moment se musí rovnat momentu gravitační síly $\boldsymbol{F}_g$, o dalších silách se řešení většinou nezmiňuje (i když jejich působení je nepopiratelné a v případě síly F_s zanedbatelné pouze v případě, že váha auta je zcela přenesena na vnější kola, kam se tak přesune i působiště síly F_s).

Př. 5: Jakou minimální hodnotu musí mít koeficient tření mezi pneumatikami a vozovkou, aby nákladní automobil z předchozího příkladu projel zatáčkou při nejvyšší určené rychlosti?

$r = 50\,\mathrm{m}$, $v = 17\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $f = ?$

Dostředivou silou při zatáčení je tření mezi pneumatikami a vozovkou.

$F_d = F_t$

$$\frac{mv^2}{r} = fmg$$

$$\frac{v^2}{r} = fg$$

$$f = \frac{v^2}{gr} = \frac{17^2}{10\cdot 50} = 0{,}58$$

Aby nákladní automobil projel zatáčkou, musí být koeficient tření mezi pneumatikami a vozovkou alespoň 0,58.

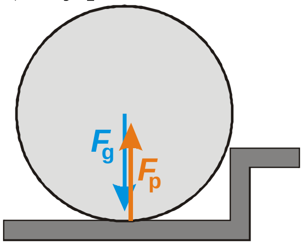
Dodatek: Získaná hodnota koeficientu tření není v žádném případě vysoká $\Rightarrow$ pro průjezd přívěsu zatáčkou je nebezpečnější převrácení než smyk.

Př. 6: Jak vysoko nad vozovkou mají podvozek závodní auta určená k jízdě po okruzích? Jak vysoko mají podvozek terénní auta? Vysvětli.

Závodní auta jezdící po okruzích: okruhy jsou upravené s rovným povrchem $\Rightarrow$ podvozek je co nejníže nad povrchem silnice, aby těžiště vozu bylo co nejníže a potřebný moment dostředivé síly, bez něhož se auto v zatáčkách převrací, co nejmenší.
Terénní auta: jezdí po nerovném povrchu $\Rightarrow$ je třeba zabránit poškození podvozku o nerovnost $\Rightarrow$ podvozek je výše $\Rightarrow$ horší jízdní vlastnosti při vysokých rychlostech (hlavně v zatáčkách).

Př. 7: Po vodorovné rovině se kutálí kolo, které narazí na schod o výšce menší než je poloměr kola. Nakresli síly, které působí na kolo:
a) v okamžiku těsně před dotykem kola a schodu,
b) během okamžiků, kdy se kolo navaluje na schod,
c) v okamžiku, kdy se kolo "odlepuje" od země a začíná se převalovat přes hranu schodu.
Předpokládej, že kolo je součástí vozidla, které na něj během kontaktu se schodem působí vodorovnou silou dostatečně velkou k tomu, aby schod překonalo.

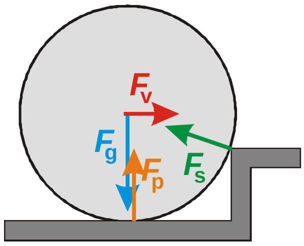
a) síly působící v okamžiku těsně před dotykem kola a schodu



Na kolo působí:

- gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ kolmo dolů,
- tlaková síla podložky $\boldsymbol{F}_p$ kolmo nahoru.

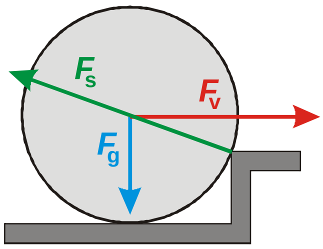
b) síly působící během okamžiků, kdy se kolo navaluje na schod



Na kolo působí:

- gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ kolmo dolů,
- tlaková síla podložky $\boldsymbol{F}_p$ kolmo nahoru (postupně se zmenšuje),
- tlaková síla hrany schodu $\boldsymbol{F}_s$,
- vodorovná síla $\boldsymbol{F}_v$, která se zvětšuje a natlačuje kolo na hranu schodu.

c) síly působící v okamžiku, kdy se kolo "odlepuje" od země a začíná se převalovat přes hranu schodu



Na kolo působí:

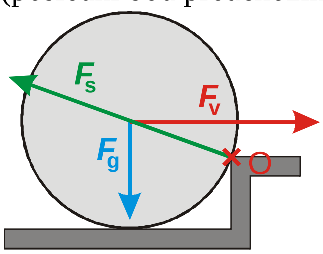
- gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ kolmo dolů,
- tlaková síla hrany schodu $\boldsymbol{F}_s$,
- vodorovná síla $\boldsymbol{F}_v$.

Kolo se přestává dotýkat země, síla $\boldsymbol{F}_p$ už nepůsobí.

Př. 8: Kolo o poloměru $r = 20\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg}$ má vyjet na schod o výšce $h = 15\,\mathrm{cm}$. Určete minimální sílu, kterou je třeba působit ve vodorovném směru na osu válce, aby schod překonal. Jak se síla změní, když se poloměr kola zvětší na 40 cm?

$r = 20\,\mathrm{cm}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $h = 15\,cm$ $\quad F = ?$

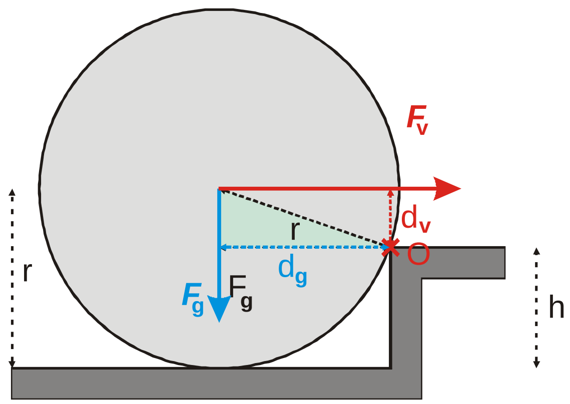
Aby válec překonal schodovitou překážku, musí se otočit přes hranu schodu v bodě O (poslední bod předchozího příkladu).



Z obrázku je vidět, že na válec působí dvě síly, které mohou způsobit otočení kolem osy procházející tímto bodem: gravitační síla $\boldsymbol{F}_g$ a vodorovná síla $\boldsymbol{F}_v$, kterou máme určit.

Tlaková síla hrany schodu $\boldsymbol{F}_s$ působí přímo v ose otáčení a její moment je nulový. Na dalších obrázcích ji nebudeme kreslit.

Minimální potřebnou velikost síly $\boldsymbol{F}_v$ určíme z rovnosti momentů, kterými síly $\boldsymbol{F}_v$ a $\boldsymbol{F}_g$ působí na kolo.



Momenty sil:

- $M_v = F_v d_v$ (kde $d_v = r - h$),
- $M_g = F_g d_g$. (kde $d_g^2 + d_v^2 = r^2$ z vyznačeného pravoúhlého trojúhelníku).

Dopočteme velikost ramene d_g:

$$d_g^2 + (r-h)^2 = r^2$$

$$d_g^2 + r^2 - 2rh + h^2 = r^2$$

$$d_g^2 = 2rh - h^2 \;\Rightarrow\; d_g = \sqrt{h(2r-h)}$$

$M_v = M_g$

$$F_v d_v = F_g d_g \Rightarrow F_v = F_g \frac{d_g}{d_v}$$

Dosadíme vztahy pro ramena: $F_v = F_g \frac{d_g}{d_v} = \frac{mg\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}$.

Kolo o poloměru 20 cm: $F_v = \frac{mg\sqrt{h(2r-h)}}{r-h} = \frac{1\cdot 10\sqrt{0,15(2\cdot 0,2-0,15)}}{0,2-0,15}\,\mathrm{N} \doteq 39\,\mathrm{N}$.

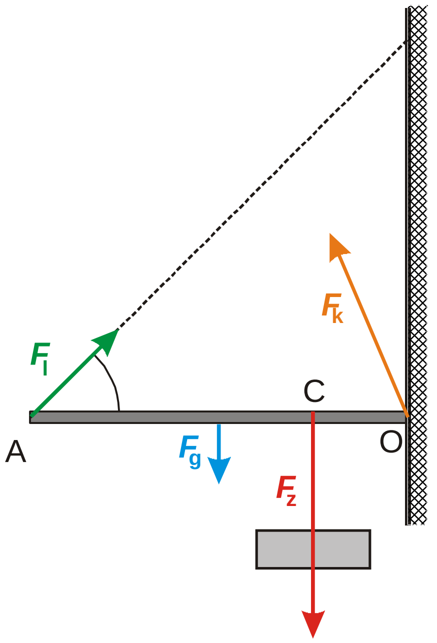
Kolo o poloměru 40 cm: $F_v = \frac{mg\sqrt{h(2r-h)}}{r-h} = \frac{1\cdot 10\sqrt{0,15(2\cdot 0,4-0,15)}}{0,4-0,15}\,\mathrm{N} \doteq 12\,\mathrm{N}$.

K překonání schodu musí na kolo o poloměru 20 cm působit minimální vodorovná síla 39 N, u kola o poloměru 40 cm stačí působení síly 12 N.

Poznámka: Předchozí příklad ukazuje, že překonání překážky kolem je potřeba značně velká síla (u kola o poloměru 20 a překážky 15 cm téměř čtyřikrát větší než síla tlačící kola na podložku). Z této skutečnosti vyplývá problematická použitelnost kola nerovném povrchu a nutnost výstavby co nejrovnější silnice.

Př. 9: Stejnorodá tyč sloužící jako závěsná hrazda je připevněna ke stěně pohyblivým kloubem v bodě O a je ve vodorovné poloze udržována ocelovým lanem svírajícím s vodorovným směrem úhel $45°$. V bodě C je zavěšeno závaží o hmotnosti $150\,\mathrm{kg}$. Urči sílu, kterou je napínáno lano, jestliže hmotnost tyče je $40\,\mathrm{kg}$. Jakou silou působící v jakém směru je namáhán kloub v bodě O? Jsou dány tyto velikosti $|AO| = 2\,\mathrm{m}$ a $|CO| = 0,5\,\mathrm{m}$.

$m_t = 40\,\mathrm{kg}$, $m_z = 150\,\mathrm{kg}$, $|AO| = 2\,\mathrm{m}$, $|CO| = 0,5\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45°$, $F_l = ?$, $F_k = ?$



Závěsná hrazda je fyzikálně páka, na kterou působí čtyři síly:

- gravitační síla na tyč $\boldsymbol{F}_g$ kolmo dolů,
- síla od závaží $\boldsymbol{F}_z$ kolmo dolů,
- síla lana $\boldsymbol{F}_l$ ve směru lana,
- síla v kloubovém přichycení ke stěně $\boldsymbol{F}_k$ šikmo vzhůru.

Tyč je v klidu jestliže platí:

- 1) součet všech čtyř působících sil je nulový,
- 2) součet momentů všech čtyř působících sil vzhledem k libovolné ose otáčení je nulový.

Neznáme dvě síly $\Rightarrow$ pomocí pravidla 1) nemůžeme ani jednu sílu určit $\Rightarrow$ použijeme pravidlo 2), jako osu použijeme místo kloubového připojení v bodě *O* (takto bude moment zatím neznámé síly $\boldsymbol{F}_k$ nulový) $\Rightarrow$ určíme $\boldsymbol{F}_l$ $\Rightarrow$ pomocí zjištěné síly $\boldsymbol{F}_l$ a pravidla 1) určíme potom sílu $\boldsymbol{F}_k$.

a) určení $\boldsymbol{F}_l$

Momentová věta, na levou stranu rovnice píšeme momenty ve směru hodinových ručiček, na pravou stranu rovnice momenty proti směru hodinových ručiček.

$$M_l = M_g + M_z$$

$$F_l |AO| \sin\alpha = F_g |TO| + F_z |CO|$$

$$F_l = \frac{F_g |TO| + F_z |CO|}{|AO| \sin\alpha} = \frac{m_t g |TO| + m_z g |CO|}{|AO| \sin\alpha} = \frac{40 \cdot 10 \cdot 1 + 150 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{2 \cdot \sin 45°} \mathrm{N} \doteq 810\,\mathrm{N}$$

b) určení $\boldsymbol{F}_k$

Sílu $\boldsymbol{F}_k$ určíme pomocí pravidla 1). Protože síly $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_z$ a $\boldsymbol{F}_l$ nejsou rovnoběžné, musíme podmínku uplatnit ve vodorovném i svislém směru.

Součet svislých složek sil $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_z$ a $\boldsymbol{F}_l$:

$F_s = F_g + F_z - F_l \sin\alpha = 400 + 1500 - 810 \cdot \sin 45°\,\mathrm{N} = 1327\,\mathrm{N}$ směrem dolů

Součet vodorovných složek sil $\boldsymbol{F}_g$, $\boldsymbol{F}_z$ a $\boldsymbol{F}_l$:

$F_v = F_l \cos\alpha = 810 \cdot \cos 45°\,\mathrm{N} = 573\,\mathrm{N}$ směrem doprava

Má-li být součet všech sil nulový, musí mít síla F_k vodorovnou složku $573\,\mathrm{N}$ směřující doleva a svislou složku $1327\,\mathrm{N}$ směřující nahoru.

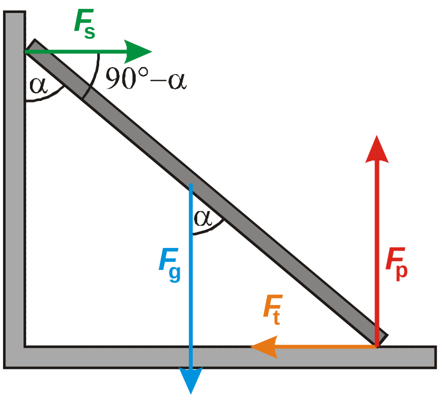
Celková velikost síly $F_k = \sqrt{573^2 + 1327^2}\,\mathrm{N} = 1445\,\mathrm{N}$.

Pro úhel, který svírá síla F_k s vodorovným směrem, platí: $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{1327}{573} \Rightarrow \varphi = 66°38'$

Lano je napínáno silou $810\,\mathrm{N}$, kloub je namáhán silou $1445\,\mathrm{N}$.

Př. 10: Pod jakým maximálním úhlem α můžeme opřít o kolmou stěnu žebřík, aby nesklouznul? Žebřík je homogenní, součinitel tření mezi žebříkem a podložkou je $0{,}6$. Tření mezi žebříkem a stěnou zanedbej.

$f = 0{,}6$, $\alpha = ?$



Pokud zanedbáme tření mezi žebříkem a stěnou, působí na žebřík čtyři síly:

- gravitační síla na žebřík $\boldsymbol{F}_g$ (v těžišti, které je u homogenního žebříku v jeho středu),
- tlaková síla podlahy $\boldsymbol{F}_p$ (kolmo vzhůru v místě dotyku žebříku s podlahou),
- tření mezi žebříkem a podlahou $\boldsymbol{F}_t$ (vodorovně v místě dotyku žebříku s podlahou)
- tlaková síla stěny $\boldsymbol{F}_s$ (vodorovně v místě, kde se žebřík opírá o stěnu).

Těleso je v rovnováze pokud platí:

- 1) Výslednice všech sil působících na těleso se rovná nule.

- 2) Výsledný moment všech sil, které na těleso působí, je vzhledem k libovolně zvolené pevné ose otáčení roven nule.

Použijeme pravidlo 2), osu otáčení můžeme zvolit libovolně, zvolíme ji například v bodě, kde se žebřík dotýká podlahy, aby rovnice pro momenty byla jednodušší (vůči této ose jsou nulové momenty sil $\boldsymbol{F}_p$ a $\boldsymbol{F}_t$):

$$M_s = M_g$$

$$F_S l \sin(90-\alpha) = F_g \frac{l}{2}\sin\alpha \quad \text{(použijeme } \sin(90-\alpha)=\cos\alpha\text{)}$$

$$F_S l \cos\alpha = F_g \frac{l}{2}\sin\alpha$$

K určení velikosti síly F_S použijeme pravidlo 1).

Ve vodorovném směru platí (síly působící doprava bereme kladně, síly působící doleva bereme záporně): $F_S - F_t = 0 \Rightarrow F_S = F_t$.

Ve svislém směru platí (síly působící nahoru bereme kladně, síly působící dolů bereme záporně): $F_P - F_g = 0 \Rightarrow F_P = F_g$.

Pro třecí sílu F_t platí: $F_t = Nf = F_P f$.

Postupně dosadíme: $F_S = F_t = F_P f = F_g f$.

Nyní můžeme dosadit do rovnice získané z pravidla 2).

$$F_S l \cos\alpha = F_g \frac{l}{2}\sin\alpha$$

$$F_g f l \cos\alpha = F_g \frac{l}{2}\sin\alpha$$

$$f \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$2f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 2f$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 2f = 2\cdot 0{,}6 = 1{,}2 \Rightarrow \alpha = 50°12'$$

Žebřík můžeme o kolmou stěnu opřít pod maximálním úhlem $\alpha = 50°12'$.

Shrnutí: Vhodným používáním obou podmínek pro rovnováhu pevného tělesa můžeme vyřešit i poměrně obtížné příklady.